

CHUYÊN ĐỀ**PHÂN TÍCH NHỮNG SAI LẦM KHI GIẢI TOÁN**

Chỉ ra những sai lầm trong lời giải của học sinh là điều cần thiết song điều quan trọng hơn là phân tích được nguyên nhân chính dẫn đến sai lầm đó. Việc thấy được những sai lầm có ý nghĩa đặc biệt về mặt phương pháp vì chúng giúp học sinh chống lối hiểu hình thức, đi sâu vào bản chất của vấn đề.

Những sai lầm hạn chế năng lực học toán của học sinh, vì vậy qua việc phân tích những sai lầm, người giáo viên cần làm cho học sinh nhận diện được các sai lầm, thấy được nguyên nhân chính dẫn đến sai lầm. Từ đó học sinh sẽ tránh được những sai lầm, nắm kiến thức một cách vững chắc hơn.

Chuyên đề này chỉ phân tích những sai lầm có tính điển hình mà học sinh thường mắc.

1.1. Những khó khăn và những sai lầm học sinh thường mắc khi ứng dụng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

* Do không nắm vững kiến thức có nhiều học sinh khi dùng đạo hàm để tìm GTLN, GTNN của hàm số đã mắc sai lầm nh sau:

Ví dụ 1 Với bài toán:

" Tìm GTLN và GTNN của hàm số: $y = \frac{x^3}{x+1}$ trên $[-2; 0]$ "

+ Một số học sinh đã giải nh sau: $y' = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$

Lập bảng biến thiên của y với $x \in [-2; 0]$

x	-2	-3/2	0
y'	/	-	0
y	8		0

$\swarrow$ $\frac{27}{4}$ $\searrow$

Từ bảng biến thiên ta có: $\max_{[-2;0]} y = 8$; $\min_{[-2;0]} y = \frac{27}{4}$

+ *Sai lầm:* Học sinh đã quên không xét tập xác định của hàm số do vậy đã lập sai bảng biến thiên. Đây là sai lầm thường gặp khi học sinh lập bảng biến thiên của hàm số đối dạng phân thức.

+ Lời giải đúng:

Bảng biến thiên của hàm số $y = \frac{x^3}{x+1}$ Với $x \in [-2; 0]$ là:

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0		
y'	/	-	0	+	/	
y	/	8	$\frac{27}{4}$	$+\infty$	0	/

Vậy GTLN và GTNN của hàm số không tồn tại.

* Cũng có nhiều học sinh do không hiểu định nghĩa nên sau khi đã lập đúng đọc bảng biến thiên nhng kết luận lại sai.

Ví dụ 2 Với bài toán:

"Tìm GTLN, GTNN của hàm số: $y = f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-5}$ "

+ Có học sinh giải nh sau:

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 5$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x-5}\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x-5)}} < 0 \text{ với } \forall x > 5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{x} + \sqrt{x-5}} = 0$$

Bảng biến thiên:

x	5	$+\infty$
f'(x)	/	-
f(x)	$\sqrt{5}$	0

$$\text{Do đó: } \max_{[5; +\infty]} f(x) = f(5) = \sqrt{5}; \min_{[5; +\infty]} f(x) = 0$$

+ Sai lầm: Học sinh không hiểu rõ định nghĩa, nhầm lẫn giữa hai khái niệm $\min f(x)$ và $\lim f(x)$ nên mặc dù bảng biến thiên lập đúng nhng kết luận vẫn sai.

+Lời giải đúng

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy $0 < f(x) \leq \sqrt{5}$ với $\forall x \geq 5$

$\Rightarrow$ GTLN của $f(x)$ là $\sqrt{5}$ còn GTNN của $f(x)$ không tồn tại.

* Khi sử dụng phương pháp đạo hàm để tìm GTLN, GTNN của hàm số do không nắm vững khái niệm GTLN, GTNN nên rất nhiều học sinh nhầm lẫn giữa các khái niệm cực đại, cực tiểu với GTLN, GTNN của hàm số.

Ví dụ 3 Với bài toán :

" Tìm GTLN, GTNN của hàm số: $y = f(x) = \frac{4}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}$ trên đoạn $[-1;1]$ "

+ Có học sinh giải nh sau:

$$y' = 4x^2 + 2x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
y'	+	0	-	0
y	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$		

Ta có: $\max_{[-1;1]} f(x) = \frac{7}{12}$; $\min_{[-1;1]} f(x) = \frac{1}{2}$

+ Sai lầm: Học sinh này đã nhầm lẫn giữa bài toán tìm GTLN, GTNN với bài toán tìm cực đại và cực tiểu của hàm số.

Ở đây $\frac{7}{12}$ và $\frac{1}{2}$ tương ứng là giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số y trên $[-1;1]$ nhưng không phải là GTLN, GTNN của y trên $[-1;1]$.

Học sinh đã quên một bước quan trọng là không so sánh các cực trị của $f(x)$ với các giá trị $f(-1)$ và $f(1)$.

+ Lời giải đúng:

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{4}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$

$$f'(x) = 4x^2 + 2x; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(-\frac{1}{2}) = \frac{7}{12} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1			
$f'(x)$	/	+	0	-	0	+	/
$f(x)$		$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{6}$		

Vậy $\max_{[-1;1]} f(x) = \frac{17}{6}$; $\min_{[-1;1]} f(x) = \frac{1}{6}$

* Một sai lầm điển hình mà nhiều học sinh thông minh nữa là chuyển đổi không tương đương đối với những bài toán cần phải đổi biến số để tìm GTLN, GTNN.

Ví dụ 4 Với bài toán :

" Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = \frac{1 + \sin^6 x + \cos^6 x}{1 + \sin^4 x + \cos^4 x}$ "

+ Một số học sinh giải nh sau:

$$\sin^4 + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } y = \frac{2 - \frac{3}{4} \sin^2 2x}{2 - \frac{1}{2} \sin^2 2x} = \frac{3 \sin^2 2x - 8}{2 \sin^2 2x - 8}$$

Đặt $t = \sin^2 2x$ ta có $y = f(t) = \frac{3t-8}{2t-8}$ xác định với $\forall t \neq 4$

$$f'(t) = \frac{-8}{(2t-8)^2} < 0 \Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến trên khoảng } (-\infty; 4) \text{ và } (4; +\infty)$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	$\frac{3}{2}$

$\swarrow$ $-\infty$ $\searrow$

Vậy không tồn tại GTLN, GTNN của $f(t) \Rightarrow$ không tồn tại GTLN, GTNN của y .

+ *Sai lầm*: Học sinh đã chuyển về bài toán không tương đương cho rằng GTNN, GTNN của $f(x)$ trùng với GTLN, GTNN của $g(t)$ với $\forall t \in \mathbb{R}$ nên sau khi đổi biến đã không tìm miền xác định của $f(t)$.

+ *Lời giải đúng*:

$$\text{Biến đổi nh trên ta đọc } y = \frac{3 \sin^2 2x - 8}{2 \sin^2 2x - 8}$$

Đặt $t = \sin^2 2x$ thì $t \in [0; 1]$

Ta có: $f(t) = \frac{3t-8}{2t-8}$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$

$$f'(t) = \frac{-8}{(2t-8)^2} < 0 \text{ với } \forall t \in [0; 1] \Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến trên } [0; 1]$$

Ta lại có: $f(0) = 1$ và $f(1) = \frac{5}{6}$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(t)$				
$f(t)$		1	$\frac{5}{6}$	

$\swarrow$

Từ bảng biến thiên ta có: $\max_R f(x) = f(0) = 1$; $\min_R f(x) = f(1) = \frac{5}{6}$

* Ngoài những sai lầm điển hình trên khi giải bài toán tìm GTLN, GTNN bằng phương pháp đạo hàm học sinh cũng hay mắc sai lầm do không nắm vững những nội dung kiến thức liên quan nên thường bỏ sót trường hợp.

Ví dụ 5 Với bài toán:

" Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 4$ với $m > 0$.Tìm GTNN của y với $x \in [0; m]$ "

+Có học sinh đã giải nh sau:

$$y' = 4x(x^2 - m) ; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{m} \\ x = -\sqrt{m} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+
y								

Vậy $\min_{[0;m]} y = y(\sqrt{m}) = 4 - m^2$

+ Sai lầm: Học sinh này là đã cho rằng với $m > 0$ thì $\sqrt{m} < m$ nên đã bỏ sót trường hợp khi $0 < m \leq 1$ thì $m \leq \sqrt{m}$

+ Lời giải đúng:

Sau khi lập được bảng biến thiên cần xét hai trường hợp:

- Nếu $m \leq \sqrt{m} \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$ thì $\min_{[0;m]} y = y(m) = m^4 - 2m^3 + 4$

- Nếu $m > \sqrt{m} \Leftrightarrow m > 1$ thì $\min_{[0;m]} y = y(\sqrt{m}) = 4 - m^2$

Vậy kết quả là:

$$\min_{[0;m]} y = \begin{cases} m^4 - 2m^3 + 4 \Leftrightarrow 0 < m \leq 1 \\ 4 - m^2 \Leftrightarrow m > 1 \end{cases}$$

Kết luận

Như vậy chúng ta thấy rằng khi sử dụng phương pháp đạo hàm để tìm GTLN, GTNN của hàm số học sinh thường mắc sai lầm do chưa hiểu rõ định nghĩa về GTLN, GTNN

chưa nắm chắc cách tìm GTLN, GTNN bằng công cụ đạo hàm; do nhầm lẫn khái niệm cực đại, cực tiểu với GTLN, GTNN của hàm số. Đặc biệt là với những bài toán khi tìm GTLN, GTNN của hàm số mà phải tiến hành đổi biến học sinh thường bỏ qua bậc quan trọng là tìm miền xác định của hàm số mới sau khi đổi biến. Học sinh còn mắc sai lầm do không nắm vững kiến thức toán học cơ bản liên quan đến bài toán tìm GTLN, GTNN.

Ngoài những sai lầm được phân tích ở trên thì khi sử dụng phương pháp đạo hàm để tìm GTLN, GTNN học sinh còn gặp một số khó khăn và rất lúng túng khi giải những bài toán về tìm GTLN, GTNN được cho dưới dạng hình học hay tình huống thực tiễn.

Ví dụ như bài toán: " Chứng minh rằng trong các hình chữ nhật nội tiếp trong hình tròn bán kính R thì hình vuông là hình có chu vi lớn nhất ", hay như bài toán " Nhà máy cá hộp sản xuất những hộp hình trụ tròn xoay kín hai đầu mà thể tích là $V \text{ cm}^3$. Muốn tốn ít vật liệu nhất khi làm hộp thì các kích thước của hộp phải như thế nào?" .

1.2. Những khó khăn và một số sai lầm của học sinh khi ứng dụng đạo hàm vào chứng minh bất đẳng thức

* Khi sử dụng phương pháp đạo hàm để chứng minh bất đẳng thức học sinh thường gặp những khó khăn sau :

- Để giải được bài toán chứng minh BĐT bằng phương pháp đạo hàm học sinh cần phải nắm chắc các kiến thức về đạo hàm và những ứng dụng của nó (nh xét tính đơn điệu, tìm cực trị của hàm số, xét chiều biến thiên của hàm số, xét tính lồi lõm của đồ thị hàm số,...). Trong khi đó những kiến thức này là hoàn toàn mới đối với học sinh nên khi vận dụng chúng học sinh còn rất lúng túng.

- Khi sử dụng tính đơn điệu của hàm số hoặc sử dụng GTLN, GTNN của hàm số hay sử dụng định lý Lagrange để chứng minh BĐT thì việc xác định được hàm số trong mỗi bài toán là công việc khó khăn đối với nhiều học sinh.

Sau đây là một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1 Cho n là số nguyên và $n \geq 3$. Chứng minh rằng: $n^{n+1} > (n+1)^n$

Giải:

Ta sẽ sử dụng tính đơn điệu của hàm số để chứng minh BĐT trên.

Nhưng ở BĐT này ta thấy xuất hiện hàm số $f(x)$. Việc xác định hàm số $f(x)$ là tương đối khó khăn với học sinh.

Để xác định được hàm số $f(x)$ ở ví dụ này cần phải thực hiện một số bước biến đổi:

$$\text{Ta có: } n^{n+1} > (n+1)^n \Leftrightarrow (n+1) \ln n > n \ln(n+1) \Leftrightarrow \frac{n+1}{\ln(n+1)} > \frac{n}{\ln n}$$

Vậy xác định được hàm số $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ với $x \geq 3$

Xét tính đơn điệu của hàm số này và suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 2 Chứng minh rằng nếu $0 < b < a$ thì: $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ (1)

Giải:

Với bài toán này ta sẽ sử dụng định lý Lagrange để chứng minh đẳng thức (1) thì điều quan trọng cũng là phải nhận ra được hàm số $f(x)$.

Ở đây học sinh cũng sẽ gặp khó khăn vì trước hết cần phải hiểu rõ định lý Lagrange và biết đối chiếu BĐT cần phải chứng minh với điều kiện của định lý Lagrange để nhận ra hàm số $f(x)$.

Để dễ nhận ra được hàm số $f(x)$ học sinh có thể biến đổi nh sau:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{a}(a-b) < \ln a - \ln b < \frac{1}{b}(a-b)$$

Từ đó xác định được hàm số $f(x) = \ln(x)$ với $x > 0$

Tiếp tục áp dụng định lý Lagrange để rút ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 3 Cho a, b thỏa mãn điều kiện $a + b = 2$.

Chứng minh rằng $a^4 + b^4 \geq 2$.

Trong những bài toán chứng minh BĐT có từ hai biến trở lên học sinh rất khó khăn khi xác định hàm số. Đây là bài toán chứng minh BĐT có tới hai biến, hai biến này ràng buộc với nhau theo một điều kiện đã cho nên việc xác định hàm số để xét chiều biến thiên của nó là tương đối khó với học sinh.

Với bài toán này có thể đặt: $x = a \Rightarrow b = 2 - x$.

Xác định được hàm số $f(x) = x^4 + (2 - x)^4$ trên $\mathbb{R}$

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ mà rút ra được điều phải chứng minh.

* Ngoài những khó khăn trên, khi sử dụng phương pháp đạo hàm vào chứng minh BĐT học sinh còn hay mắc một số sai lầm do không nắm vững những kiến thức về đạo hàm

liên quan đến việc xét tính đơn điệu, tìm cực trị của hàm số, hay dùng đạo hàm để tìm GTLN, GTNN của hàm số... Và thậm chí mắc sai lầm cả do không nắm vững một số tính chất cơ bản của BĐT. Sau đây là một số ví dụ thể hiện sai lầm.

Ví dụ 4 Chứng minh rằng với $\forall x > 0$ thì $\sin x < x$

+ Một số học sinh giải nh sau:

Xét $f(x) = x - \sin x$ với $x > 0$

Ta có: $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến với $\forall x > 0$.

Từ $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow x - \sin x > 0 - \sin 0 = 0$

Vậy $\sin x < x$ với $\forall x > 0$.

+ Sai lầm: $f(x)$ đồng biến trên miền $(0; +\infty)$ không chứa 0, nên không thể so sánh $f(x)$ và $f(0)$ khi $x > 0$.

+ Lời giải đúng là:

Xét $f(t) = t - \sin t$ trên $\mathbb{R}$

$f'(t) = 1 - \cos t \geq 0$ với $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow x - \sin x > 0 - \sin 0 = 0 \Rightarrow x > \sin x$

+Chú ý: Vậy qua sai lầm này cần chú ý cho học sinh: Nếu $f(x)$ đồng biến với $x \in [a;b]$ và $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ thì $f(x_2) > f(x_1)$

Ví dụ 5 Chứng minh rằng nếu $x > -1$ thì $xe^x > \frac{-1}{e}$

+ Có học sinh giải nh sau:

Ta có: $f_1(x) = x$ và $f_2(x) = e^x$ là các hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x) = xe^x$ là tích hai hàm số đồng biến nên cũng đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ $x > -1 \Rightarrow f(x) > f(-1) \Rightarrow xe^x > \frac{-1}{e}$

+Sai lầm: Học sinh đã mắc sai lầm vì cho rằng tích của hai hàm đồng biến là hàm đồng biến.

+ Lời giải đúng:

Xét hàm số $f(x) = xe^x$ với $x > -1$. Ta có $f'(x) = e^x(x+1)$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $x > -1$ thì $f(x) > f(-1) \Rightarrow xe^x > \frac{-1}{e}$

+ *Chú ý*: Qua sai lầm này cần chú ý cho học sinh rằng: nếu các hàm đồng biến chỉ nhận các giá trị dương thì mới có thể kết luận được rằng tích của hai hàm số đồng biến là một hàm số đồng biến.

Ví dụ 6 Chứng minh rằng nếu $x \geq y > 1$ thì $x + \sqrt{y} \geq y + \sqrt{x}$

+ *Một số học sinh giải nh sau*:

Với $x \geq y > 1$ ta có $x \geq y$ và $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$

Trừ từng vế ta có: $x - \sqrt{x} \geq y - \sqrt{y} \Rightarrow x + \sqrt{y} \geq y + \sqrt{x}$

+ *Sai lầm*: Học sinh đã mắc sai lầm khi trừ từng vế của hai BĐT cùng chiều.

+ *Lời giải đúng*:

Xét $f(t) = t - \sqrt{t}$ với $t > 1$

$f'(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{2\sqrt{t}-1}{2\sqrt{t}} > 0$. Do đó $f(t)$ đồng biến với $t > 1$

Mà $x \geq y > 1$ nên $f(x) \geq f(y) \Rightarrow x - \sqrt{x} \geq y - \sqrt{y} \Rightarrow x + \sqrt{y} \geq y + \sqrt{x}$

+ *Chú ý*: Qua sai lầm này cần chú ý cho học sinh:

$$\begin{cases} a \geq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a - c \geq b - d$$

* Ngoài những sai lầm và khó khăn trên thì nguyên nhân dẫn đến việc học sinh không giải được bài toán tìm GTLN, GTNN và chứng minh BĐT bằng phương pháp đạo hàm chỉ vì mắc sai lầm ở bậc tính đạo hàm, giải phương trình, thực hiện các phép biến đổi đồng nhất...

1.3. Sai lầm khi giải các bài toán tam thức bậc hai**Ví dụ 1:**

Tìm m để phương trình:

$$(m-1)m^2 + (2m-1)x + m + 5 = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt.}$$

Lời giải

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$

$$\Leftrightarrow (2m-1)^2 - 4(m-1)(m+5) > 0$$

$$\Leftrightarrow -20m + 21 > 0$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{21}{20}$$

Ví dụ 2:

Tìm m để biểu thức

$$\sqrt{(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m-3} \text{ có nghĩa với mọi } x$$

Lời giải

Biểu thức có nghĩa với mọi x $\Leftrightarrow f(x) = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m-3 \geq 0 \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ 2(m-1)(m+2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

Ví dụ 3:

Biết rằng (x;y) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x+y=m \\ x^2+y^2=-m^2+6 \end{cases}$

Tìm GTLN và GTNN của $F = xy - 6(x+y)$

Lời giải

Ta có $x^2 + y^2 = -m^2 + 6 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy = -m^2 + 6$

$$\Leftrightarrow xy = m^2 - 3$$

Do đó: $F = m^2 - 6m - 3 = (m-3)^2 - 12 \geq -12$

Vậy $\min F = -12 \Leftrightarrow m=3$ còn F không có GTLN vì F là hàm bậc hai với hệ số a = 1 > 0

Ví dụ 4:

Tìm m sao cho phương trình:

$$x^2 - (2m+1)x + m^2 = 0 \text{ chỉ có một nghiệm thoả mãn } x > 3$$

Lời giải

Cách 1: Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta = 0$. Khi đó phương trình có nghiệm $x_1 = x_2 = \frac{S}{2}$. Do đó phương trình chỉ có một nghiệm $x > 3$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \frac{S}{2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 - 4m^2 = 0 \\ \frac{2m+1}{2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m+1=0 \\ m > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{4} \\ m > \frac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy không có giá trị nào của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Xét hai trường hợp

$$\text{TH1: } 3 < x_1 = x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \frac{S}{2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 - 4m^2 = 0 \\ \frac{2m+1}{2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m+1 = 0 \\ m > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{4} \\ m > \frac{5}{2} \end{cases}$$

Suy ra không có giá trị nào của m thỏa mãn trường hợp này.

$$\text{TH2: } x_1 \leq 3 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(3) \leq 0 \\ \frac{S}{2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 6 \leq 0 \\ m > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m \leq 3 + \sqrt{3}$$

Vậy với $\frac{5}{2} < m \leq 3 + \sqrt{3}$ thì phương trình chỉ có một nghiệm thỏa mãn $x > 3$.

Cách nào đúng, cách nào sai? Nguyên nhân và cách khắc phục?

Ví dụ 5:

Tìm m sao cho phương trình

$$mx^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0 \text{ không có nghiệm ở ngoài khoảng } (-1; 1)$$

Lời giải

Phương trình không có nghiệm ở ngoài khoảng $(-1; 1) \Leftrightarrow -1 < x_1 \leq x_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(-1) > 0 \\ af(1) > 0 \\ -1 < \frac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - m(m+1) \geq 0 \\ m(4m+3) > 0 \\ m(-1) > 0 \\ -1 < \frac{m+1}{m} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m > 0 \\ m < -\frac{3}{4} \\ m < 0 \\ -1 < \frac{m+1}{m} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < -\frac{3}{4}$$

Vậy $-1 \leq m < -\frac{3}{4}$ thì phương trình không có nghiệm ở ngoài $(-1; 1)$

Vậy bài toán giải đúng hai sai? Nguyên nhân và cách khắc phục nó?

Ví dụ 6:

Chứng minh rằng phương trình:

$$(x - 95)(x - 96) + (x - 96)(x - 97) + (x - 97)(x - 95) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn } 95$$

Lời giải

Gọi vế trái của phương trình là $f(x)$ thì:

$$f(x) = 3x^2 - 2(95 + 96 + 97)x + 95.96 + 96.97 + 97.95$$

$$\text{Do đó: } af(95) = 3(95-96)(95-97) > 0 \text{ và } \frac{s}{2} - 95 = \frac{95+96+97}{3} - 95 = 1 > 0.$$

Suy ra $95 < x_1 < x_2$ (ĐPCM)

1.4. Sai lầm khi giải phương trình và bất phương trình .

Ví dụ 1:

$$\text{Giải phương trình } 3x^3 - 6x^2 - 9x = 9(x^2 - 2x - 3) \quad (*)$$

Lời giải

$$\text{PT} (*) \Leftrightarrow 3x(x^2 - 2x - 3) = 9(x^2 - 2x - 3)$$

$$\Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$$

Ví dụ2:

Giải phương trình $\sqrt{-x^3+3x-2} + \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$

Lời giải

Điều kiện để căn thức có nghĩa là: $\begin{cases} -x^3+3x-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2(x+2) \leq 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \leq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$

Vậy không tồn tại giá trị nào của x để hai căn thức đồng thời có nghĩa nên phương trình vô nghiệm.

Ví dụ3:

Giải phương trình $\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x+1} = x+1$

Lời giải

Điều kiện căn thức có nghĩa: $\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1) \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$

Khi đó phương trình có dạng $\sqrt{(x-1)(x+1)} - \sqrt{x+1} = x+1$. Vì $x \geq 1$ nên $\sqrt{x+1} > 0$, chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{x+1}$ ta có: $\sqrt{x-1} - 1 < \sqrt{x+1}$.

Vì $x \geq 1$ nên $\sqrt{x-1} \leq \sqrt{x+1}$. Suy ra $\sqrt{x-1} - 1 < \sqrt{x+1}$. Vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ4:

Giải và biện luận phương trình $a-5+\frac{2a+5}{x-2}=0(*)$ theo tham số

Lời giải

Điều kiện $x \neq 2$. Khi đó $(*) \Leftrightarrow (a-5)(x-2)+2a+5=0$
 $\Leftrightarrow (5-a)(x-2)=2a+5$
 $\Leftrightarrow (5-a)x=15$

Nếu $a \neq 5$ thì $x = \frac{15}{5-a}$

Nếu $a=5$ thì phương trình vô nghiệm.

Vậy bài toán giải đúng hay sai? Nguyên nhân và cách khắc phục nó?

Ví dụ5:

Giải phương trình: $2x+\sqrt{x-3}=16(*)$

Lời giải

Điều kiện $x \geq 3$. Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x-3}=16-2x \Leftrightarrow x-3=256-64x+4x^2 \Leftrightarrow 4x^2-65x+259=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=\frac{37}{4} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

$x \geq 3$). Vậy phương trình có nghiệm $x=7$ và $x=\frac{37}{4}$

Ví dụ6:

Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{2x-1} = 1$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{PT} &\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{2x-1})^3 = 1 \Leftrightarrow 3x-2+3.\sqrt[3]{x-1}.\sqrt[3]{2x-1}(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{2x-1})=1 \\ &\Leftrightarrow 3x-2+3\sqrt[3]{(x-1)(2x-1)}=1 \text{ (vì } \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{2x-1}=1) \\ &\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-1)(2x-1)}=-(x-1) \Leftrightarrow (x-1)(2x-1)=-(x-1)^3 \Leftrightarrow x^2(x-1)=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 7:

Giải bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}} < \frac{1}{x+5} (*)$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{BPT} (*) &\Leftrightarrow x+5 < \sqrt{x^2-2x-3} \\ &\Leftrightarrow (x+5)^2 < x^2-2x-3 \\ &\Leftrightarrow 12x+28 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

Ví dụ 8:

Tìm m để phương trình sau có nghiệm $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = m (*)$

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x}$ ($t \geq 0$), ta có $\sqrt{(x+1)(4-x)} = \frac{t^2-5}{2}$

Khi đó phương trình (*) viết thành $t + \frac{t^2-5}{2} = m \Leftrightarrow t^2 + 2t - 5 - 2m = 0 (**)$

Đặt $f(x) = t^2 + 2t - 5 - 2m$. PT(*) có nghiệm $\Leftrightarrow$ PT(**) có nghiệm $0 \leq t_1 \leq t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ af(0) \geq 0 \\ \frac{s}{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+6 \geq 0 \\ -5-2m \geq 0 \\ -1 \geq 0 \end{cases} \text{ Vô nghiệm}$$

Vậy không có giá trị nào của m để phương trình vô nghiệm.

Vậy bài toán giải đúng hay sai? Nguyên nhân và cách khắc phục nó?

Vậy phương trình có nghiệm $x=2$.

Ví dụ 9:

Giải phương trình $\log_2 x^2 = 2\log_2(3x+4) (*)$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 > 0 \\ 3x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -\frac{4}{3} \end{cases}$

Khi đó PT (*)

$$\Leftrightarrow 2\log_2 x = 2\log_2(3x+4) \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2(3x+4)$$

$$\Leftrightarrow x = 3x+4 \Leftrightarrow x = -2$$

Giá trị này không thoả mãn điều kiện đã đặt nên phương trình vô nghiệm.

Ví dụ10:

Tìm m để phương trình $\lg(x^2+2mx) - \lg(x-1) = 0(*)$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải

Cách 1:

$$PT(*) \Leftrightarrow \lg(x^2 + 2mx) = \lg(x-1) \Leftrightarrow x^2 + (2m-1)x + 1 = 0(**)$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow PT(**)$ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \text{ hoặc } m = \frac{3}{2}$$

Cách 2:

$$PT(*) \Leftrightarrow \lg(x^2 + 2mx) = \lg(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 + (2m-1)x + 1 = 0 \end{cases} (**)$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow PT(**)$ có nghiệm duy nhất $x > 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \frac{s}{2} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = \frac{3}{2} \\ \frac{1-2m}{2} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = \frac{3}{2} \\ m < -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ Vô nghiệm}$$

Vậy cách nào đúng? Cách nào sai? Nguyên nhân và cách khắc phục?

Ví dụ11:

$$\text{Giải bất phương trình } x.e^x > \frac{-1}{2} (1)$$

Lời giải

Ta có $f_1(x)=x$ và $f_2(x) = e^x$ là các hàm đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x) = x.e^x$ là tích của hai hàm đồng biến nên cũng đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\text{Ta có } f(-1) = -1(e^{-1}) = \frac{-1}{e}. \text{ Do đó } (1) \Leftrightarrow f(x) > f(-1)$$

$$\Leftrightarrow x > -1$$

1.5.Sai lầm khi tính tích phân

Ví dụ12.

CMR: $F(x) = -(1+x)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{-x}$?

Từ đó hãy tìm nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x-1)e^{-x}$?

Bạn A làm như sau:

$$F'(x) = -e^{-x} + (1+x)e^{-x} = x.e^{-x} = f(x) \Rightarrow F(x) \text{ là một nguyên hàm của hàm số } f(x).$$

$$\text{Ta có: } \int g(x)dx = \int (x-1)e^{-x}dx = \int x.e^{-x}dx - \int e^{-x}dx$$

$$= \left[-(1+x)e^{-x} + c \right] - \left[-e^{-x} + c \right]$$

$$= -(1+x)e^{-x} + e^{-x} = -xe^{-x}.$$

Vậy bài toán sai ở đâu? Nguyên nhân và cách khắc phục?

Phân tích: Sai lầm của lời giải trên tương tự như sai lầm khi giải hệ phương trình lượng giác ở lớp 11:

$$\begin{cases} \sin(x+y)=0 \\ \cos(x-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=k\pi \\ x-y=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ y=-\frac{\pi}{4} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

ở hệ trên, chỉ vì viết chung ký hiệu k với $k \in \mathbb{Z}$ cho hai phương trình nên khi trừ từng vế hai phương trình đã làm triệt tiêu số hạng $k\pi$ và dẫn tới mất nghiệm của hệ.

Đối với việc lấy nguyên hàm cũng vậy, các em hay viết hằng số C cho mọi phép tính nguyên hàm nên dẫn tới sai lầm. Ta cần sửa lại đoạn cuối ở lời giải trên.

$$\text{Lời giải đúng: } \int g(x)dx = \int (x-1)e^{-x}dx = \int x.e^{-x}dx - \int e^{-x}dx$$

$$\begin{aligned} &= [-1(1+x)e^{-x} + C_1] - [-e^{-x} + C_2] \\ &= -1(1+x)e^{-x} + C_1 - C_2 = -xe^{-x} + C \quad (\text{với } C = C_1 - C_2) \end{aligned}$$

Ví dụ13:

$$\text{Tính tích phân } I = \int_0^2 \frac{dx}{x-1}$$

Bạn B làm như sau:

Theo công thức Newton- Leibnitz:

$$\text{Ta có } I = \int_0^2 \frac{dx}{x-1} = \int_0^2 \frac{d(x-1)}{x-1} = \ln|x-1| \Big|_0^2 = \ln|1| - \ln|-1| = 0$$

Vậy bài toán sai ở đâu? nguyên nhân và cách khắc phục?

Phân tích:

Hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ gián đoạn tại $x=1 \in [0;2]$ nên không sử dụng được công thức Newton-Leibnitz để tính tích phân như trên được. Vì trên đoạn $[0;2]$ hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ không liên tục

$$\text{không tồn tại tích phân } I = \int_0^2 \frac{dx}{x-1}$$

Ví dụ14:

$$\text{Tính tích phân } I = \int_{-2}^0 (x+1)^2 dx$$

Bạn C làm như sau:

$$\text{Đặt } u = (x+1)^2 \Rightarrow du = 2(x+1)dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2(x+1)} = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

Với $x=-2$ thì $u = -1$.

$$\text{Với } x=0 \text{ thì } u=1. \text{ Do đó } I = \int_{-2}^0 (x+1)^2 dx = \int_1^{-1} \frac{u du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int_1^{-1} \sqrt{u} du = 0$$

Vậy bài toán sai ở đâu? Nguyên nhân và cách khắc phục?

Phân tích : Nhận thấy rằng $u = (x+1)^2$ không phải là hàm số đơn điệu trên đoạn $[-2;0]$ nên không thể đổi biến, đổi cận như lời giải trên được .

Hơn nữa lời giải trên còn sai lầm khi viết $dx = \frac{du}{2(x+1)} = \frac{du}{2\sqrt{u}}$.

Như vậy đã từ $u = (x+1)^2$ suy ra $x+1 = \sqrt{u}$, điều này chỉ viết được khi $x \geq -1$

Lời giải đúng:

Cách 1: Ta có $I = \int_{-2}^0 (x+1)^2 dx = I = \int_{-2}^0 (x+1)^2 d(x+1) = \frac{(x+1)^3}{3} \Big|_{-2}^0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Cách 2: Ta có $I = \int_{-2}^0 (x+1)^2 dx = \int_{-2}^{-1} (x+1)^2 dx + \int_{-1}^0 (x+1)^2 dx$

Xét $I_1 = \int_{-2}^{-1} (x+1)^2 dx$, đặt $u = (x+1)^2$

$\Rightarrow du = 2(x+1)dx$. Do $x \in [-2; -1]$ nên $x+1 \leq 0$

Vậy $x+1 = -\sqrt{u} \Rightarrow dx = \frac{du}{-2\sqrt{u}}$. Khi $x = -2$ thì $u = -1$; Khi $x = -1$ thì $u = 0$.

Do đó $I_1 = \int_{-2}^{-1} (x+1)^2 dx = -\int_1^0 \frac{udu}{2\sqrt{u}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{u}}{2} du = \frac{u\sqrt{u}}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

Xét $I_2 = \int_{-1}^0 (x+1)^2 dx$. Tương tự như trên ta có $I_2 = \frac{1}{3}$

Vậy $I = I_1 + I_2 = \frac{2}{3}$

Ví dụ 15:

Xét tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\cos^2 x - \cos 2x} dx$

Bạn D làm như sau:

Hiển nhiên, ta có: $\sqrt{\cos^2 x - \cos 2x} \geq 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ do đó $I \geq 0$

Mặt khác $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\cos^2 x - \cos 2x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\cos^2 x - (2\cos^2 x - 1)} dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 - \cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x dx = -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -1$$

Vậy $-1 \geq 0$ (!)

Vậy bài toán sai ở đâu? Nguyên nhân và cách khắc phục?

Phân tích: Lời giải sai lầm khi biến đổi biểu thức $\sqrt{1 - \cos^2 x} = \sin x$.

Nhớ rằng: $\sqrt{A^2} = |A|$

Lời giải đúng:

Ta có: $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\cos^2 x - \cos 2x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\cos^2 x - (2\cos^2 x - 1)} dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 - \cos^2 x} \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 |\sin x| \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x \, dx = \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = 1$$

Chú ý: các bài toán tương tự:

$$1. \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} \, dx \quad 2. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx \quad 3. \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} \, dx$$

Ví dụ 16 :

Xét tích phân $I = \int \cot x \, dx$

Khi tính tích phân $I = \int \cot x \, dx$. Một học sinh làm như sau:

Ta có : $I = \int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx$, áp dụng phương pháp tìm nguyên hàm từng phần bằng

cách đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{\sin x} \\ dv = \cos x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx \\ v = \sin x \end{cases}$ ta được:

$$I = \frac{1}{\sin x} \sin x + \int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x} \, dx = 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx. \text{ Hay } I = 1 + I \Rightarrow 0 = 1(!)$$

Vậy bài toán sai ở đâu? Nguyên nhân và cách khắc phục?

Phân tích lời giải trên là sai. Vì các nguyên hàm của một hàm số khác nhau một hằng số, nên khi áp dụng phương pháp tìm nguyên hàm từng phần mà không chú ý đến hằng số thì số đó sẽ dẫn tới điều vô lý $0=1(!)$

Chú ý: Tương tự sai lầm ở trên các em cũng dẫn tới điều vô lý “Mọi số tự nhiên đều bằng nhau”

Giả sử: $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Ta có $I = \int f(x) \, dx = F(x) + C$

Trong đó C là hằng số tùy ý, lần lượt cho C bằng các số tự nhiên tùy ý m, n ta được:

$$I = F(x) + m = F(x) + n \Rightarrow m = n(!)$$

Vậy mọi số tự nhiên đều bằng sao?

Ví dụ 17:

Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin x}$

Ta làm như sau: Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$ thì $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\text{Do đó } I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin x} = 2 \int \frac{dt}{(1+t)^2} = 2 \int (1+t)^{-2} d(1+t) = 2 \cdot \frac{-1}{1+t} + C = \frac{-2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + C$$

$$\text{Theo công thức Newton- Leibnitz, ta có: } I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin x} = \frac{-2}{1 + \tan \frac{x}{2}} \Big|_0^{\pi} = \frac{-2}{1 + \tan \frac{\pi}{2}} + \frac{2}{1 + \tan 0}$$

Vì $\tan \frac{\pi}{2}$ không xác định nên tích phân cần tính không tồn tại.

Vậy bài toán sai ở đâu? Nguyên nhân và cách khắc phục?

Phân tích: Đây là sai lầm của nhiều em học sinh hay dùng công thức lượng giác để biểu diễn $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ qua $\tan \frac{x}{2}$

Việc $\tan \frac{\pi}{2}$ không xác định ở trên chỉ suy ra được tích phân đã cho không tính được phương pháp đó.

Lời giải đúng:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})} = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\pi} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

Ví dụ 18:

Xét hypebol xác định bởi phương trình: $y^2 - x^2 + 1 = 0$ (H)

TH1: Nếu cắt (H) bởi đường thẳng $x = 2$ và gọi giao điểm của chúng là M, N

Thể tích V_1 của khối tròn xoay do tam giác cong MAN quay xung quanh trục ox tạo thành

$$\text{là: } V_1 = \pi \int_1^2 y^2 dx = \pi \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^2 = \frac{4}{3} \pi$$

TH2: Bây giờ cắt (H) bởi hai đường thẳng $x = -2$, $x = 2$ thì thể tích V_2 của khối tròn xoay do tam giác cong MAN và M'A'N' quay xung quanh ox là :

$$V_2 = \pi \int_{-2}^2 y^2 dx = \pi \int_{-2}^2 (x^2 - 1) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{4}{3} \pi$$

Vậy Voi cũng bằng Kiến ư?

Phân tích: Từ PT $y^2 - x^2 + 1 = 0$ suy ra hàm số y không xác định với $|x| < 1$. Nhờ hình vẽ ta có

$$V = \pi \int_{-2}^{-1} y^2 dx + \pi \int_1^2 y^2 dx = \dots = \frac{8}{3} \pi$$

Hiệp hoà , ngày 25 tháng 4 năm 2008

Trình Quang Hoà