

GIỚI THIỆU MỘT SỐ BÀI TOÁN ÔN THI ĐẠI HỌC VỀ TAM GIÁC

1) Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

Giải: Đặt $y = \cos A + \cos B + \cos C$ ta có:

$$y = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{C}{2} - 2\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} + y - 1 = 0$$

Để phương trình này xác định $\sin\frac{C}{2}$ ta phải có:

$$\Delta' = \left(\cos\frac{A-B}{2}\right)^2 - 2(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow 2y \leq 2 + \left(\cos\frac{A-B}{2}\right)^2 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow y \leq \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

Vậy trong mọi tam giác ABC ta đều có $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

2) Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{8}$

Giải: * Giả thiết A tù $\Rightarrow B, C$ nhọn. Khi đó $\cos A < 0$ và $\cos B > 0, \cos C > 0$

$$\Rightarrow \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C < 0 \Rightarrow \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{8}$$

* Giả thiết A, B, C nhọn. Khi đó $\cos A > 0$ và $\cos B > 0, \cos C > 0$

Theo bất đẳng thức Côsi dành cho 3 số ta có: $\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3} \geq \sqrt[3]{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}$

$$\Leftrightarrow 27\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq (\cos A + \cos B + \cos C)^3 \quad (1).$$

Theo kết quả bài 1): $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \quad (2).$

Từ (1) và (2) ta có: $27\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Rightarrow \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{8}$

Vậy trong mọi tam giác ABC ta đều có: $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{8}$

3) Chứng minh rằng: Nếu $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = \frac{1}{8}$ **thì** ΔABC **đều.**

Giải: Ta có $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 8\cos A \cdot \frac{1}{2}[\cos(B+C) + \cos(B-C)] - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos A \cdot [\cos(\pi - A) + \cos(B-C)] - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos A \cdot [-\cos A + \cos(B-C)] - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 A - 4\cos A \cdot \cos(B-C) + \cos^2(B-C) + 1 - \cos^2(B-C) = 0$$

$$\Leftrightarrow [2\cos A - \cos(B-C)]^2 + \sin^2(B-C) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\cos A - \cos(B-C) = 0 \\ \sin(B-C) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos A - \cos 0 = 0 \\ B = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos A = \frac{1}{2} \\ B = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 60^\circ \\ B = C \end{cases}$$

$$\Rightarrow A=B=C=60^\circ \Rightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

4) Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$

Giải: Ta có $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C$

$$= 2 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2 C = 2 - \cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2[\pi - (A+B)]$$

$$= 2 - \cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2(A+B) = 2 + \frac{1}{4}\cos^2(A-B) - [\cos(A+B) + \frac{1}{2}\cos(A-B)]^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}.$$

Vậy trong mọi tam giác ABC ta đều có $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$

5) a) Chứng minh bất đẳng thức: Với 6 số thực $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ **ta luôn có:**

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ **(BDT Bunhiacôpxki)**

b) Tam giác ABC có 3 trung tuyến m_a, m_b, m_c **và** R **là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác**

ABC. Chứng minh rằng: Nếu $m_a + m_b + m_c = \frac{9R}{2}$ **thì ABC là một tam giác đều.**

Giải: a) Xét trong hệ tọa độ vuông góc Oxyz xét 2 vectơ khác $\vec{0}$:

$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Theo công thức định góc của 2 vectơ ta có

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \text{ Vì } |\cos(\vec{a}, \vec{b})| \leq 1 \text{ nên } \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \leq 1 \Rightarrow |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Theo phương pháp tọa độ: $|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|\cos(\vec{a}, \vec{b})| = 1 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

b) Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki: $|1.m_a + 1.m_b + 1.m_c| \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}$

$$\Rightarrow (m_a + m_b + m_c)^2 \leq 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \quad (1).$$

Theo định lý đường trung tuyến trong tam giác ABC ta có:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \quad (2)$$

Theo định lý sin trong tam giác ABC ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2 \sin^2 A + 4R^2 \sin^2 B + 4R^2 \sin^2 C = 4R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \stackrel{\text{bài 4}}{\leq} 4R^2 \cdot \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2 \quad (3).$$

Từ (2) và (3): $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq \frac{27R^2}{4} \quad (4)$

Từ (1) và (4): $(m_a + m_b + m_c)^2 \leq \frac{81R^2}{4} \Leftrightarrow m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki: $m_a + m_b + m_c = \frac{9R}{2} \Leftrightarrow \frac{m_a}{1} = \frac{m_b}{1} = \frac{m_c}{1}$

$\Rightarrow$ Tam giác ABC là tam giác đều.